Роль сжимаемости в моделях геофизических процессов.

Радионов Анатолий Анатольевич, к.т.н.

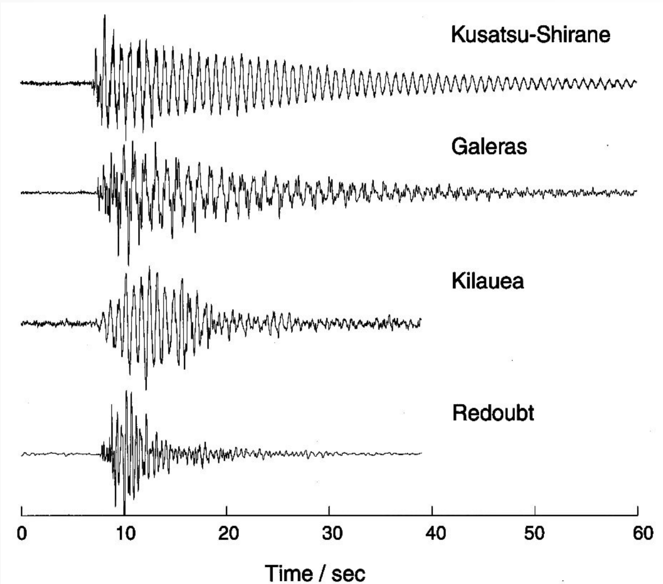
Южный математический институт ВНЦ РАН

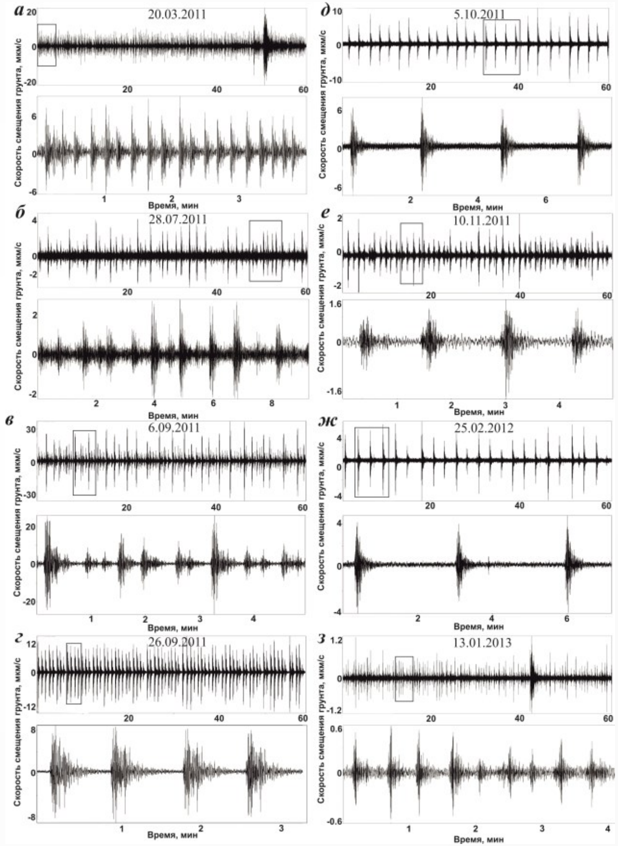
2023 г.

Сжимаемость – свойство вещества изменять свой объём под действием внешнего давления. Сжимаемость характеризуется адиабатическим коэффициентом сжимаемости, который определяется формулой

$$\beta_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S \approx c_0^{-2}$$

Аналитическая модель механизма образования низкочастотных сейсмических событий





Вулкан Кизимен

Аналитическая модель механизма образования низкочастотных сейсмических событий

Реология Максвелла.

$$\sigma^{ij} + \lambda \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial t} = \mu \varepsilon^{ij},$$

ε^{ij} – тензор скоростей деформаций.

σ^{ij} – тензор напряжений.

$\lambda = \mu / E$ – время релаксации

μ – вязкость

E – модуль упругости

Аналитическая модель механизма образования низкочастотных сейсмических событий

Несжимаемое решение, реология Максвелла.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + g\right) = \frac{\mu}{\lambda\rho_0}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

$$w(r, t = 0) = \varphi(r), \frac{\partial w}{\partial t}(r, t = 0) = \psi(r)$$

$$w(r = 0) < \infty \qquad w(r = R) = 0$$

$$\gamma_n^2 = \rho_0^2 - 4\lambda\mu\rho_0\omega_{0,n}^2 R^{-2}, \gamma_n^2 < 0$$

$$w(r,t) = -\frac{\partial p/\partial z + \rho_0 g}{4\mu}(R^2 - r^2) +$$

$$+exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right)\sum_{n=1}^{n=\infty} J_0\left(\omega_{0,n}\frac{r}{R}\right) \times \left[(\varphi_n - w_{Pn})cos\left(t\frac{\gamma_n}{2\lambda\rho_0}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(\psi_n + \frac{\varphi_n - w_{Pn}}{2\lambda}\right)\frac{2\lambda\rho_0}{\gamma_n}sin\left(t\frac{\gamma_n}{2\lambda\rho_0}\right)\right]$$

Аналитическая модель механизма образования низкочастотных сейсмических событий

Сопоставление с сейсмическими данными Эльбрусского вулканического центра

$$\vartheta_n = \frac{\left(4\lambda\mu\rho_0\omega_{0,n}^2 R^{-2} - \rho_0^2\right)^{1/2}}{2\lambda\rho_0}$$

Экспериментальные данные:

Мода P, период T, сек = (100, 92, 83, 76, 62, 58, 52, 50);

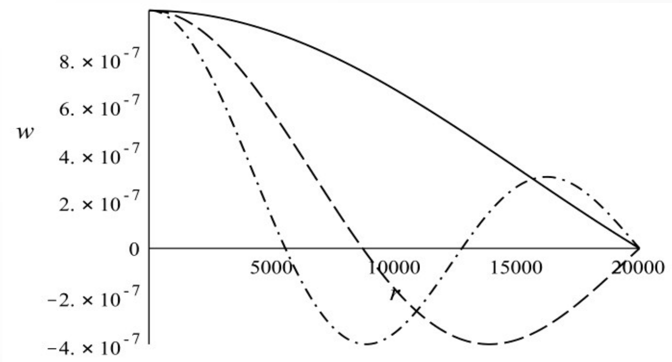
добротность Q = (100, 120, 140, 140, 170, 180, 140, 200).

$\rho_0 = 2700$

$R = 20000$

$\lambda \approx QT/(4\pi)$

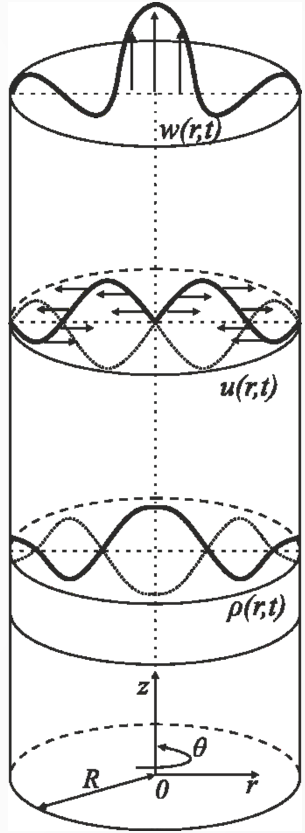
$\mu \approx 8 \cdot 10^{11} \div 10^{12}$ м²/с



$\vartheta_1 \approx 0.0732$ или период 86 сек для первой моды

Аналитическая модель механизма образования низкочастотных сейсмических событий

Сжимаемое решение. реология Максвелла.



Уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Уравнение для радиальной компоненты скорости:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\mu}{\lambda \rho_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\lambda \rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}.$$

Граничные условия: $u(r=R)=0 \quad \partial\varrho/\partial r\,(r=R)=0$

Начальные условия: $\varrho(r,t=0)=\varphi(r); \ \dfrac{\partial \varrho}{\partial t}(r,t=0)=\psi(r)$

Дополнительные условия: $\partial w/\partial z = 0$

$\partial u/\partial z = 0$

Аналитическая модель механизма образования низкочастотных сейсмических событий

Сжимаемое решение. Отличается от несжимаемого решения.

$$\varrho(r,t) = exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right)\sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\omega_{1,n}\frac{r}{R}\right) \times \left[\varphi_n cos(t\gamma_n) + \frac{1}{\gamma_n}\left(\psi_n + \frac{\varphi_n}{2\lambda}\right) sin(t\gamma_n)\right],$$

$$u(r,t) = exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right)\sum_{n=1}^{\infty} J_1\left(\omega_{1,n}\frac{r}{R}\right)\frac{R}{\omega_{1,n}\rho_0} \times \left[-\psi_n cos(t\gamma_n) + \left(\varphi_n \frac{4\gamma_n^2\lambda^2+1}{4\lambda^2\gamma_n} + \frac{\psi_n}{2\gamma_n\lambda}\right) sin(t\gamma_n)\right].$$

Здесь $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функция Бесселя нулевого и первого порядка, соответственно. Обозначено: φ_n – коэффициент разложения функции $\varphi(r)$ в ряд по функциям Бесселя $J_1\left(\omega_{1,n}\, r/R\right), n = 1,2,3, \ldots$, а ψ_n – коэффициент разложения функции $\psi(r)$ в такой же ряд.

$$\gamma_n^2 = \frac{\mu}{\lambda\rho_0}\frac{\omega_{1,n}^2}{R^2} - \frac{1}{4\lambda^2},$$

$\omega_{1,n}$ – n-й положительный корень уравнения $J_1(\omega) = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ Выражения (9, 10) записаны для случая $\gamma_n^2 > 0$, когда возможно осциллирующее поведение во времени.

Аналитическая модель механизма образования низкочастотных сейсмических событий

Сжимаемое решение. Влияние на вертикальную скорость

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\mu}{\lambda\rho_0}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) = -\frac{\Delta p}{\lambda\rho_0} + \frac{g}{\lambda\rho_0}\varrho + \frac{g}{\lambda\rho_0}\varrho, \qquad \rho = \rho_0 + \varrho$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\mu}{\lambda\rho_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\lambda\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r},$$

При нулевых начальных и граничных условиях вертикальная компонента скорости определяется только правой частью уравнения или решением для плотности. Уравнение для вертикальной компоненты скорости имеет аналитическое решение вида (нулевые начальные условия):

$$w(r,t) = -\exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right)\frac{g}{\lambda\rho_0}\sum_{n=1}^{\infty} W_{i,n}$$

$$W_{i,n} = -\frac{2\lambda J_0\left(\omega_{0,n}\frac{r}{R}\right)\left[\omega_{1,i}J_0(\omega_{0,n})J_1(\omega_{1,i}) - \omega_{0,n}J_1(\omega_{0,n})J_0(\omega_{1,i})\right]}{\gamma_i\delta_n J_1^2(\omega_{0,n})(\omega_{1,i}^2 - \omega_{0,n}^2)\left(\frac{1}{4} + (\delta_n + \gamma_i)^2\lambda^2\right)\left(\frac{1}{4} + (\delta_n - \gamma_i)^2\lambda^2\right)}$$
$$\times\left[-\gamma_i\lambda\exp\left(-\frac{t}{2\lambda}\right)\left(\delta_n a_{i,n}\cos(\delta_n t) - b_{i,n}\sin(\delta_n t)\right) + a_{i,n}\lambda\gamma_i\cos(\gamma_i t) - c_{i,n}\delta_n\sin(\gamma_i t)\right],$$

$$\delta_n^2 = \frac{\mu}{\lambda\rho_0}\frac{\omega_{0,i}^2}{R^2} - \frac{1}{4\lambda^2},$$

$a_{i,n} = \cdots, b_{i,n} = \cdots, c_{i,n} = \cdots$

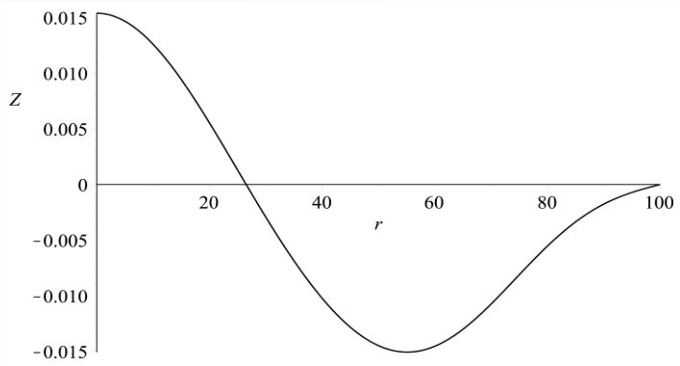
Громоздкие выражения…

Аналитическая модель механизма образования низкочастотных сейсмических событий

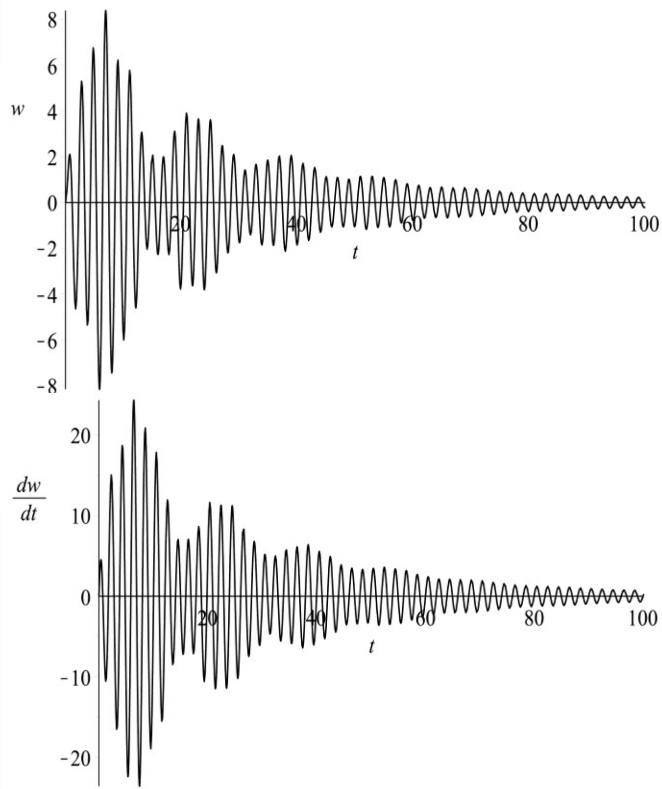
Сжимаемое решение. Влияние на вертикальную скорость

возмущение плотности $\varphi_2 = 1 \div 1000$ кг/м3, $\psi_n = 0$, длина канала 1000 м.

На основе (9) можно оценить горизонтальные скорости движения фронта волны, как $\delta_n R/\omega_{0,n} \approx 31{,}7$ м/с и $\gamma_i R/\omega_{0,n} \approx 44{,}8$ м/с и мало зависят от номера гармоники. В наблюдениях отмечаются для скорости движения фронта деформации скорости от 30 до 50 м/с, что позволяет сделать вывод, что модель удовлетворительно описывает наблюдения.



Остаточные смещения поверхности кратера



Задача о равновесии столба несжимаемой атмосферы.

Математическое решение строится с предположением о нулевых скоростях течения воздуха в столбе, тогда уравнения движения упрощаются до гипсометрического уравнения $dp/dz = -\rho g$, которое интегрируется с граничным условием $p(z = 0) = p_b$ и получается барометрическая формула:

$$p = p_b \exp\left(-\frac{g}{R_a \theta_0} z\right) = p_b \exp\left(-\frac{z}{H}\right),$$

где p – давление,ρ – плотность, z – вертикальная координата, $H = R_a \theta_0 / g \approx 8{,}4$ км – высота средней атмосферы, θ_0 –средняя по столбу абсолютная температура, R_a – универсальная газовая постоянная атмосферного воздуха, g – ускорение свободного падения, принимаемое константой. Адиабатическая температура:

$$T(z) = T_b - \gamma_a z,$$

где $\gamma_a \approx -0.0098$ К/м – сухоадиабатический градиент температуры.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы. Управляющие уравнения

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho D = 0,$$

где $D = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$ – дивергенция скорости, $\vec{v} = (u, v, w)$ – вектор скорости по координатам (x, y, z), соответственно, ρ – плотность, $\partial/\partial\tau = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ – оператор Стокса.

Часто используется это уравнение в виде $D = 0$, что позволяет описывать несжимаемые течения жидкости.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

уравнение сохранения импульса

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f v + \mu_1 \nabla^2 u + \mu_2 \frac{\partial D}{\partial x};$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho f u + \mu_1 \nabla^2 v + \mu_2 \frac{\partial D}{\partial y};$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu_1 \nabla^2 w + \mu_2 \frac{\partial D}{\partial z}.$$

где p – давление, f – параметр Кориолиса, μ_1 – турбулентная вязкость воздуха, $\mu_2 = \varsigma + \mu_1/3$, где ς – вторая вязкость. Для описания турбулентности используется подход Экмана.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

уравнение для энергии/температуры

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{c_V}\frac{p}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho c_V}\frac{\partial}{\partial z}\left(c_Q\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) + \frac{Q}{\rho c_V},$$

где θ, c_V, c_Q, Q – абсолютная температура, теплоемкость, теплопроводность, мощность источников/стоков тепла столба атмосферного воздуха, соответственно. В несжимаемом случае первое слагаемое в правой части не учитывается.

Это уравнение с использованием адиабатической температуры T:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho c_V}\frac{\partial}{\partial z}\left(c_Q\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) + \frac{Q}{\rho c_V}.$$

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы. Уравнения гидродинамики

уравнение состояния

$$p = \rho R_a \theta.$$

R_a – универсальная газовая постоянная атмосферного воздуха

Уравнение состояния для адиабатических процессов

$$p = A\rho^\gamma,$$

где A – константа, определяемая из граничных условий,
$\gamma = 1.4$ – показатель адиабаты.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы. Уравнение для плотности или давления

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} + D^2 - 2\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} - 2\frac{\partial(u,w)}{\partial(x,z)} - 2\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\nabla^2 p + \frac{\nabla\rho\cdot\nabla p}{\rho^2} - \frac{\partial g}{\partial z} + f\xi + \frac{\mu_1+\mu_2}{\rho}\nabla^2 D$$

где f принимается константой, $\xi = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$ и использовано

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \equiv \mathrm{D}^2 - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} - 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z},$$

якобианы:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial(u,w)}{\partial(x,z)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы. Уравнение для плотности или давления

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-\frac{2}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2=\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+g\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\frac{\partial g}{\partial z}+(\mu_1+\mu_2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right).$$

для адиабатической температуры T:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}-\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2=c^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right)+g\frac{\partial T}{\partial z}+(\gamma-1)T\frac{\partial g}{\partial z},$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(z=0,t)=T_{zb}(t)\;,T(z=0,t)=T_b(t),$$

где $T_{zb}(t), T_b(t)$ – известные функции времени. В качестве начального условия используется некоторый профиль $T_s(z)$, известный из данных эксперимента. В численных моделях граничное условие ставится на несуществующей верхней границе.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

Стационарное решение

При упрощающих предположениях: 1) ускорение свободного падения: $g = Const$ и градиента: $\partial g/\partial z = g_z = Const$, 2) постоянство скорости звука $c^2 = c_0^2$, стационарное решение:

$$T(z) = \exp\left(-z\frac{g(\gamma-1)+\sqrt{\delta}}{2\gamma c_0^2}\right)\left[\frac{\gamma^2 c_0^4}{\delta}\left(C_1 \exp\left(\frac{z\sqrt{\delta}}{(\gamma-1)c_0^2}\right) - C_2\right)^2\right]^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}},$$

где $\delta = (\gamma-1)(4\gamma g_z c_0^2 + \gamma g^2 - g^2)$,

$$C_1 = T_b^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{T_{zb}}{T_b} + \frac{g(\gamma-1)+\sqrt{\delta}}{2\gamma c_0^2}\right), C_2 = T_b^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{T_{zb}}{T_b} + \frac{g(\gamma-1)-\sqrt{\delta}}{2\gamma c_0^2}\right).$$

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

Нестационарные решения

$$T = T_S \frac{\exp\left(-z\dfrac{g(\gamma-1)+\sqrt{\delta}}{2\gamma c_0^2}\right)}{\cos^2\left(t\sqrt{\dfrac{\lambda_T}{\gamma-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}}\left[\frac{\gamma^2 c_0^4}{\delta}\left(C_3 \exp\left(\frac{z\sqrt{\delta}}{(\gamma-1)c_0^2}\right)-C_4\right)^2\right]^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}},$$

где $\delta = (\gamma-1)\left(4\gamma\lambda_T c_0^4 - 4\gamma g_z c_0^2(\gamma-1) + g^2(\gamma-1)\right)$,

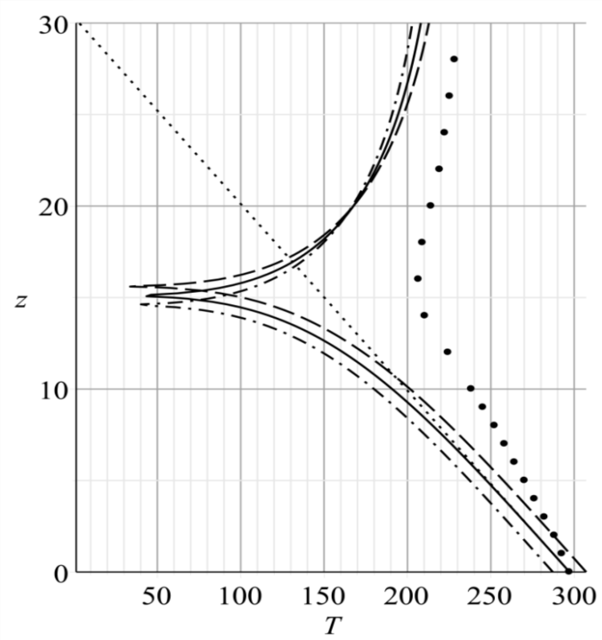
$$C_3 = T_b^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{T_{zb}}{T_b}+\frac{g(\gamma-1)+\sqrt{\delta}}{2\gamma c_0^2}\right), C_4 = T_b^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{T_{zb}}{T_b}+\frac{g(\gamma-1)-\sqrt{\delta}}{2\gamma c_0^2}\right).$$

Нестационарное решение для давления:

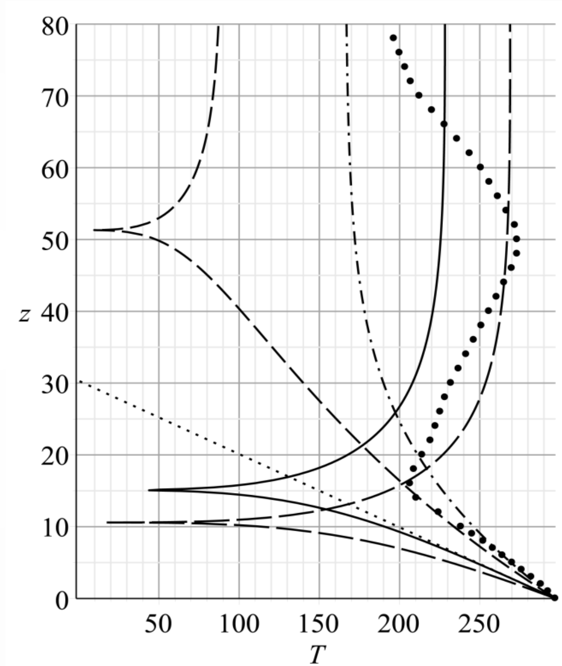
$$p = p_s\left[\cos^2\left(t\sqrt{\frac{\lambda_p}{\gamma}}\right)\right]^{-\frac{\gamma}{2}} \exp\left(-\frac{g+\sqrt{g^2-4(\gamma g_z-\lambda_p)c_0^2}}{2c_0^2}z\right),$$

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

Сжимаемое стационарное решение отличается от несжимаемого решения выше 8 км существенно, а ниже – практически совпадает.



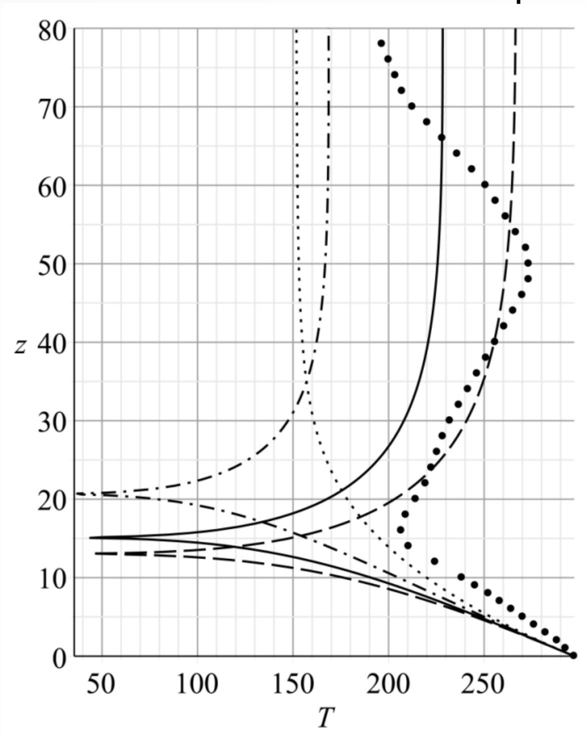
Профили аналитического решения при различных значениях приземной температуры T_b.



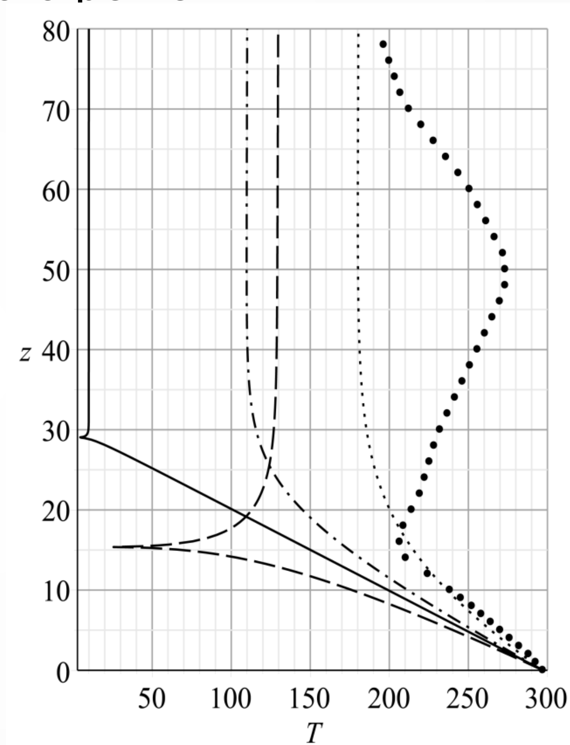
Профили адиабатической температуры при $T_b = 297.15$ К и различных значениях T_{zb}.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

Анализ стационарного решения



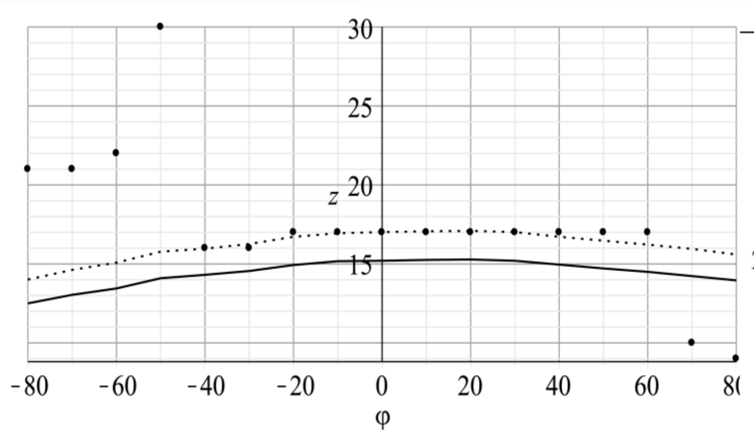
Профили сжимаемого решения при разной скорости звука $c_0 = Const$.



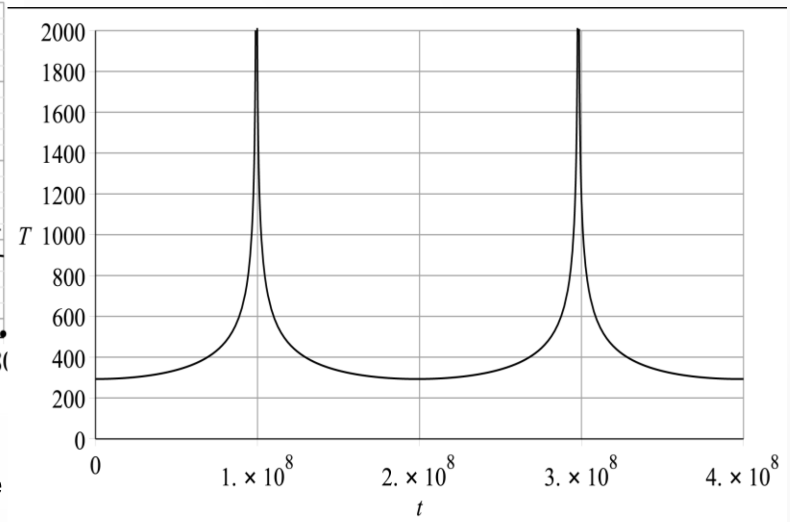
Численное решение стационарного уравнения, $T_b = 297{,}15$ K, $c^2 = \gamma R_a T$.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

Анализ решения



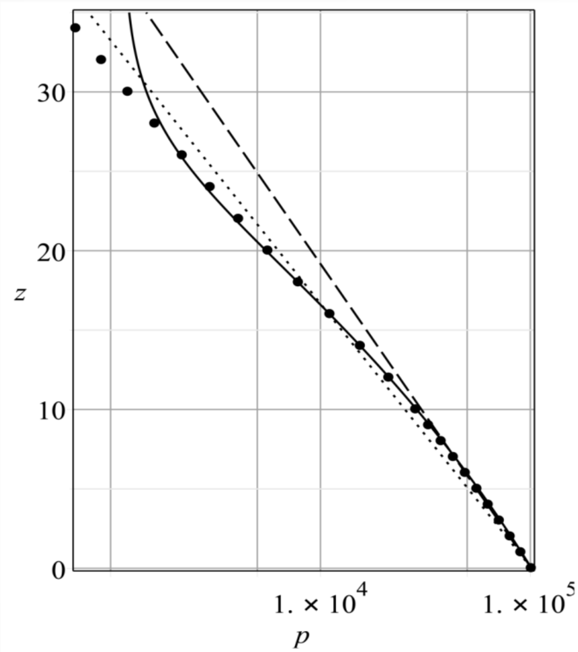
Зависимость высоты особой точки сжимаемого решения от широты (в км). Широтное изменение высоты тропопаузы летом отмечены кружками. Отрицательные значения оси абсцисс соответствуют южным, положительные – северным широтам.



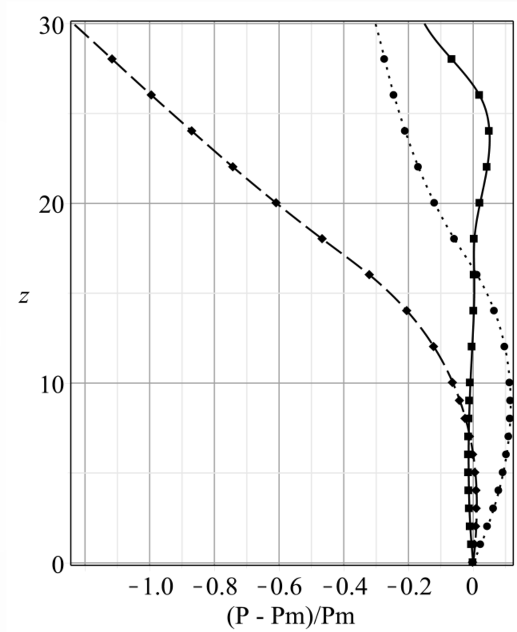
Зависимость от времени выражения сжимаемого решения при $\lambda_T = 10^{-16}$ с$^{-2}$. Значения температуры выражены в градусах Кельвинах и ограничены величиной 2000 К, время в секундах.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

Анализ решения



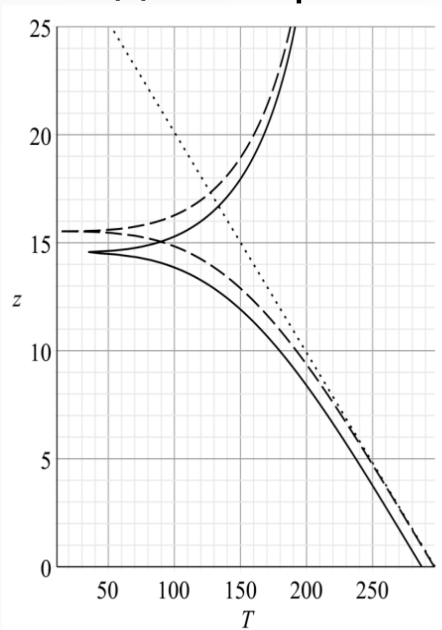
Распределение давление (в Паскалях) по высоте (в километрах) для справочной атмосфере в июле. Использована логарифмическая шкала.

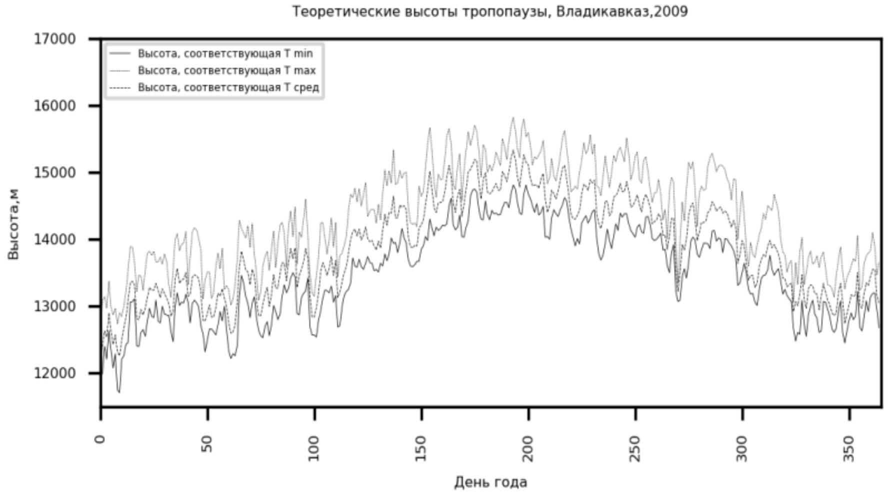


Разности между измерениями давления и решениями уравнения (6) (в Паскалях), высота в километрах.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

Анализ решения. Владикавказ.



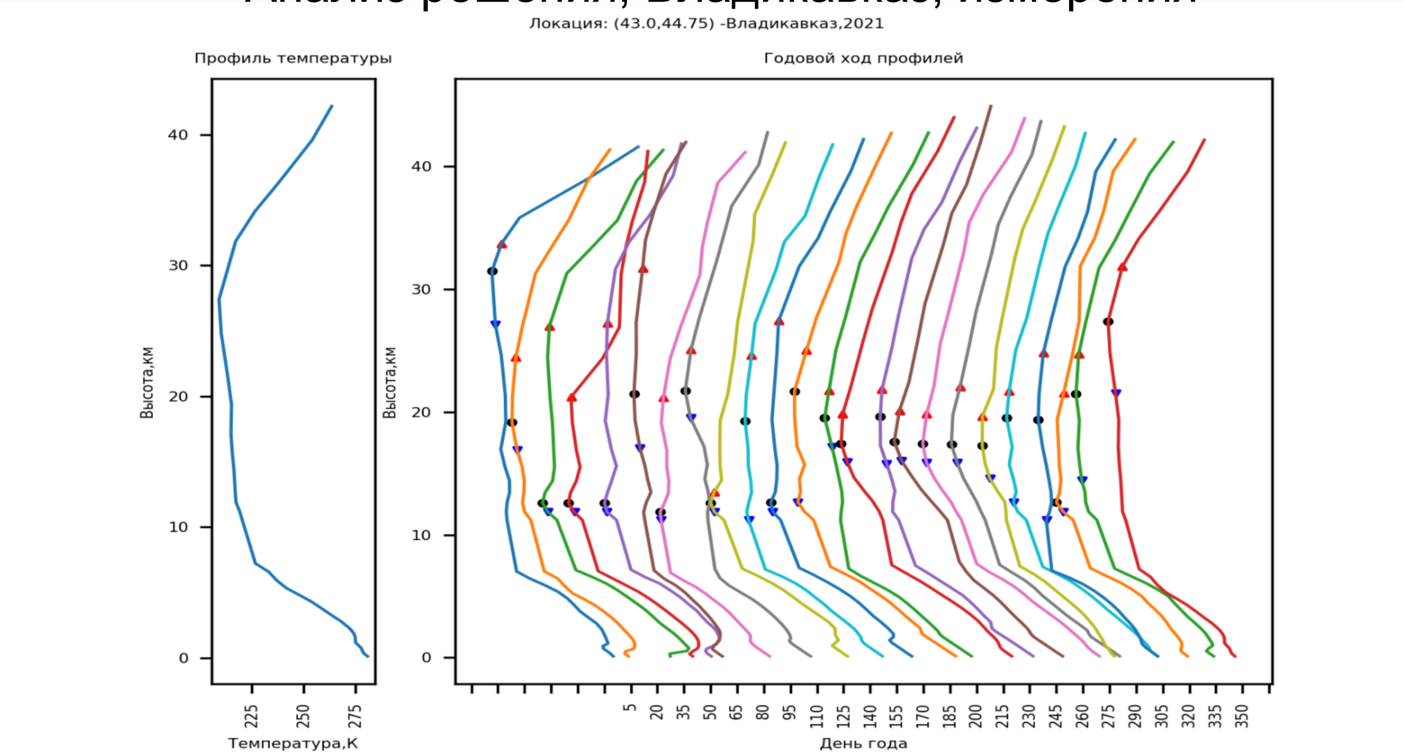


Профили решения (1) при различных значениях приземной температуры T_b выбранной из измерений для 15-го июля 2020 года для Владикавказа. Сплошная кривая – минимальная суточная температура (14.0 С), пунктирная кривая – максимальная суточная температура (23.45 С).

Высота (в метрах) острых минимумов адиабаты (1), вычисленная для минимальных (сплошная кривая), максимальных (кривая с тонким пунктиром) и средней (пунктирная кривая) температур на высоте 2 м для Владикавказа за 2009 г.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

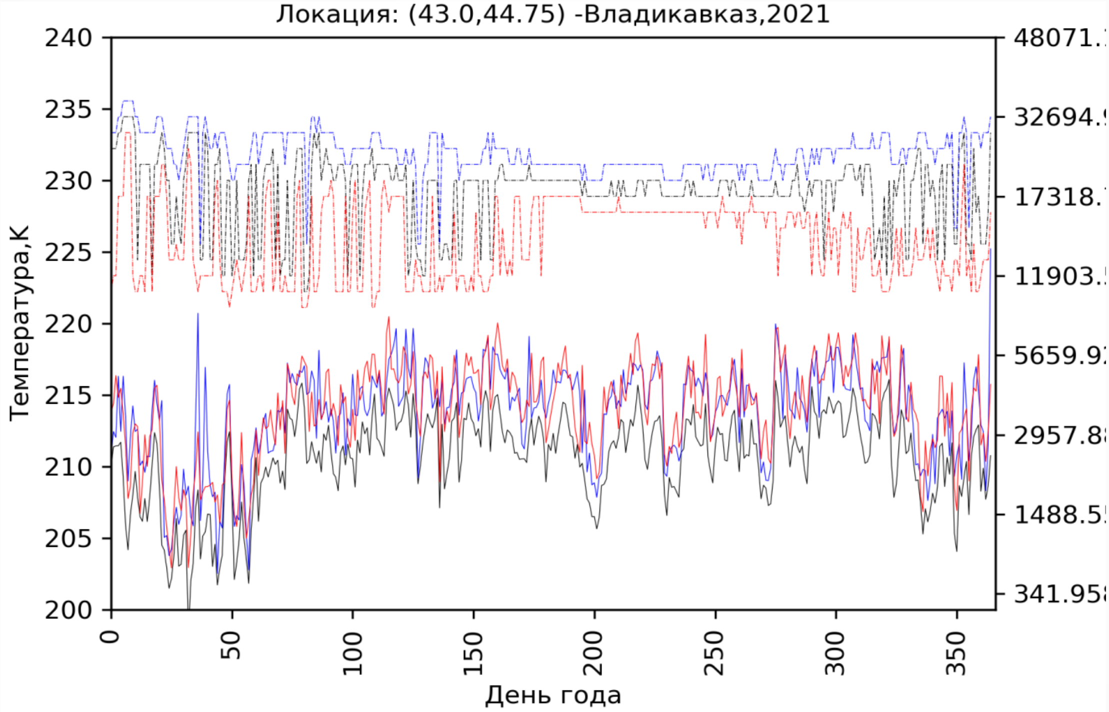
Анализ решения, Владикавказ, измерения



Измерения профилей температуры. Алгоритм определения тропопаузы по максимально удаленному от минимума превышению температуры больше +5 К.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

Анализ решения. Владикавказ, измерения.



Интервал высот тропопаузы (сверху, правая шкала) и температура тропопаузы (снизу, левая шкала) для Владикавказа за 2021 год по данным ERA5 [Коперникус]. Алгоритм определения коридора по превышению температуры над минимумом +5 ºК сверху и снизу.

Задача о равновесии столба сжимаемой атмосферы.

Анализ трендов по времени решения

уклон тренда	у-пересечение
Высота холодной точки тропопаузы, реанализ	
2,8 м/год	9,1667 (милибар)
Высота верхней границы тропопаузы, реанализ	
7,5 м/год	7,8333 (милибар)
Высота нижней границы тропопаузы, реанализ	
16,3 м/год	10,9167 (милибар)
Высота острого минимума адиабаты (1), теория	
4,5 м/год	

Благодарю за внимание!